

Chapitre n° 5 : Matrices et graphes

1 Définitions et vocabulaire

Définition 1: Matrice

Une *matrice* de taille $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{n \text{ colonnes}} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{m \text{ lignes}} \end{array}$$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) est situé dans la i -ième ligne et la j -ième colonne. Ce nombre est un *coefficient* de la matrice.

Remarque 1: En général, on note une matrice avec une lettre majuscule ou avec le coefficient général entre parenthèses, par exemple (a_{ij}) .

Si $i > 9$ ou $j > 9$, on écrira par exemple $a_{1,11}$ et pas a_{111} pour éviter la confusion avec $a_{11,1}$.

Exemple 1: Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Le coefficient a_{12} vaut 7. Le coefficient a_{21} vaut 3.

Définition 2: Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée

- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée *matrice ligne* de taille n .
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée *matrice colonne* de taille n .
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée *matrice carrée d'ordre n* .

Exemple 2: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ sont respectivement une matrice ligne de taille 3, une matrice colonne de taille 2 et une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 3: Égalité entre matrices

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont *égales* si elles ont la même taille $m \times n$ et si, pour tout couple $(i ; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition 4: Matrice diagonale

Une *matrice diagonale* (a_{ij}) est une matrice carrée dont les coefficients à l'extérieur de la *diagonale principale* sont nuls, c'est-à-dire tels que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarque 2: Une matrice diagonale se note aussi $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
Dans une matrice diagonale, un ou plusieurs coefficients a_i peuvent être nuls.

Définition 5: Matrice identité

La *matrice identité d'ordre n* est la matrice diagonale d'ordre n , notée I_n , dont la diagonale principale ne contient que des 1.

Exemple 3: L'identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi la noter $\text{diag}(1, 1, 1)$.

Remarque 3: S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

Définition 6: Matrice transposée

La *matrice transposée* d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice notée A^T , de taille $n \times m$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Exemple 4: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $(0, 3 \ 0, 7)^T = \begin{pmatrix} 0, 3 \\ 0, 7 \end{pmatrix}$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme de deux matrices

Définition 7: Somme de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.
La *somme* des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ définie par :
 $A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout couple $(i ; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 5: Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} -3+2 & 5-5 \\ -1+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Propriété 1

Soit A, B, C trois matrices de même taille.

- $A + B = B + A$ (commutativité)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité)

Définition 8: Différence de deux matrices

Soit A et B deux matrices de même taille.
La *différence* des matrices A et B est la matrice notée $A - B$ égale à la somme $A + (-B)$ où $-B$ est la matrice *opposée* de B , c'est la matrice dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B .

Exemple 6: Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 & 5+5 \\ -1-4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2 Produit d'une matrice par un réel

Définition 9: Produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et k un nombre réel.

Le *produit* de A par le réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k .

Exemple 7: $A = \begin{pmatrix} 3,5 & -5 & 2,5 \\ -1 & 0,5 & -5,5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors, } -2A = \begin{pmatrix} -2 \times 3,5 & -2 \times (-5) & -2 \times 2,5 \\ -2 \times (-1) & -2 \times 0,5 & -2 \times (-5,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Propriété 2

Soit A et B deux matrices de même taille $m \times n$ et deux réels k et k' .

- $0A = 0_{mn}$ et $1A = A$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + k')A = kA + k'A$
- $(kk')A = k(k'A)$

Remarque 4: Dans l'égalité $0A = 0_{mn}$, le 0 de gauche est un réel et le 0_{mn} de droite désigne la *matrice nulle*, matrice ayant la même taille que A et dont tous les coefficients sont nuls.

2.3 Produit de deux matrices

Définition 10: Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Le *produit* de la matrice ligne $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est noté AB et est égal au réel :

Exemple 8: Soit $A = (3 \ 0 \ -2)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Définition 11: Produit de deux matrices

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.

Le *produit* de A par B , noté AB , est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ telle que c_{ij} est égal au produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .

Remarque 5:

- Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .
- Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe, il n'est en général pas commutatif : en premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et, même si c'est le cas, généralement on n'a pas $AB = BA$.

Méthode 1 (Multiplier deux matrices): Pour calculer la matrice C égale à AB , on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B , puis on dispose les matrices suivant le schéma $\begin{array}{c|c} & B \\ A & C \end{array}$ de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la i -ème ligne de A et de la j -ième colonne de B .

EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer AB .

CORRECTION

A est de taille 2×4 et B de taille 4×3 .

A a autant de colonnes que B a de lignes, donc

$C = AB$ existe et sa taille est 2×3 .

On dispose les matrices comme ci-contre.

On calcule alors, par exemple :

$$c_{11} = 1 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 0 - 2 \times 2 = 7.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 15 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Remarque 6: Il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que $AB=0$.

Exemple 9: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors, $AB =$

Propriété 3

Soit A , B et C trois matrices compatibles avec les produits écrits ci-après et soit k un réel.

- $(AB)C = A(BC) = ABC$ (associativité)
- $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité)
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- si A est carré d'ordre n , alors $AI_n = I_nA = A$ et $A0_n = 0_nA = 0_n$

2.4 Puissance d'une matrice carrée

Définition 12

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

La puissance n -ième de A est la matrice notée A^n égale :

- au produit de n facteurs A si $n \neq 0$;
- à la matrice identité I de même ordre que celui de A si $n = 0$.

Exemple 10: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

On peut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

Méthode 2 (Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice):

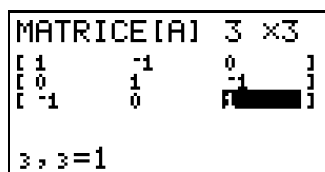
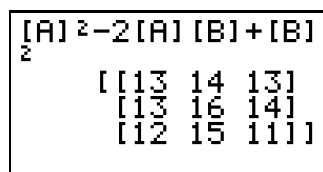
EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

CORRECTION

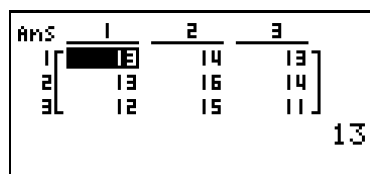
Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode "Matrice" puis le menu "EDIT".
- Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche "(-)". Faire de même pour B .
- Quitter le mode "Matrice" puis y entrer à nouveau et, dans le menu "NOMS", sélectionner la matrice **[A]**. Compléter la formule et taper "Entrer".

Avec une calculatrice CASIO

- Entrer dans le menu "RUN-MAT" puis choisir **▶MAT** (touche **F3**).
- Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Faire de même pour B .
- Quitter **▶MAT**, taper la formule en faisant précéder chaque nom de matrice par "Mat" (touches **SHIFT** puis **2**) : **Mat A^2 - 2Mat A Mat B + Mat B^2**. Exécuter.

3 Matrices inversibles

3.1 Inverse d'une matrice carrée

Définition 13: Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée A d'ordre n est *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

La matrice B , notée A^{-1} , est appelée la *matrice inverse* de A .

Exemple 11: Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc B est l'inverse de A .

Propriété 4

Si une matrice est inversible, alors son inverse est unique.

Preuve 1: Soit A une matrice inversible ayant deux inverses B et C .

Ainsi, $B = C$. Donc, l'inverse de A est unique.

Théorème 5: admis

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre n .

Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Remarque 7: Il suffit donc seulement de vérifier l'une des égalités $AB = I$ ou $BA = I$ pour montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exemple 12: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Donc A et B sont inverses l'une de l'autre et on a les égalités $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

3.2 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 14: Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ égal à

Théorème 6: Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Soit $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors, $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$

Preuve 2:

- Si $ad - bc \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{ad - bc} MN =$$

Donc M est inversible et son inverse est $\frac{1}{ad - bc} N = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Si $ad - bc = 0$, alors $MN = 0_2$.

Remarque 8:

- Toute matrice carrée admet un déterminant et un seul, mais pour un ordre strictement supérieur à 2, il n'existe pas de formule simple pour le calculer et on utilisera une calculatrice ou un logiciel de calcul formel.
- Le déterminant non nul est un critère d'inversibilité d'une matrice carrée de tout ordre.

Exemple 13: $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 2 \times 8 = 18 - 16 = 2 \neq 0$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

4 Résolution d'un système linéaire

Propriété 7: Écriture matricielle d'un système

Le système linéaire $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ a pour écriture matricielle

Preuve 3: $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Remarque 9: Cette propriété se généralise à un système de dimension quelconque.

Exemple 14: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ correspond au système $\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{cases}$.

Propriété 8

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n .
Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution :
le n -uplet correspondant à la matrice colonne

Preuve 4: Soit un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A est inversible.
Alors, on a :

$$AX = B \Leftrightarrow$$

Méthode 3 (Résoudre un système de deux équations à deux inconnues):

EXERCICE

Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x - 4y = 15 \end{cases}.$$

CORRECTION

On résout l'équation $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

On calcule $\det(A) = -4 \times 2 - 3 \times 5 = -23$. Comme $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.
Donc, l'équation $AX = B$ a pour unique solution $X = A^{-1}B$.

On calcule
$$X = \frac{-1}{23} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{-1}{23} \begin{pmatrix} -4 \times 8 - 5 \times 15 \\ -3 \times 8 + 2 \times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107/23 \\ -6/23 \end{pmatrix}.$$

Le système admet donc pour unique solution le couple $\left(\frac{107}{23}; \frac{-6}{23}\right)$.

Remarque 10: Un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A n'est pas inversible a soit une infinité de solutions, soit aucune.

Exemple 15: Le système
$$\begin{cases} 3x + 6y = a \\ 4x + 8y = b \end{cases}$$
 s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Or, $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

Dans le système, multiplions l'équation du haut par 4 et celle du bas par 3. On obtient :

$$\begin{cases} 12x + 24y = 4a \\ 12x + 24y = 3b \end{cases} \text{ ce qui entraîne que } 4a = 3b.$$

Si $4a \neq 3b$, alors le système n'admet aucune solution.

Si $4a = 3b$, alors l'équation admet l'ensemble infini de solutions $\left\{ \left(2t; \frac{a}{6} - t \right); t \in \mathbb{R} \right\}$

Méthode 4 (Résoudre un système linéaire avec la calculatrice ou un logiciel):

- On passe à l'écriture matricielle du système : $AX = B$.
- On vérifie que le déterminant de A est non nul, pour vérifier l'inversibilité de A .
- On détermine alors A^{-1} , puis le produit $A^{-1}B$ pour obtenir la solution.

EXERCICE

Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -1 \\ x + y - 5z = 2 \\ -4x + 3y = 6 \end{cases}.$$

CORRECTION

Le système a pour écriture matricielle $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode MATRICE puis dans le menu MATH et choisir la commande **det()**.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches **2nde** **[x]**) et "]" (touches **2nde** **[=]**). Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche **(-)**.
- Faire "précéd" (touches **2nde** **[enter]**) pour revenir dans l'instruction précédente.
Supprimer **det()** et la parenthèse finale.
À la suite, appuyer sur la touche **x⁻¹**, saisir la matrice colonne **B** et appuyer sur "entrer".

Avec une calculatrice CASIO

- Appuyer sur la touche **OPTN**, choisir MAT puis la commande **Det**.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches **2nde** **[+]**) et "]" (touches **2nde** **[=]**).
- Appuyer sur la flèche gauche pour revenir dans l'instruction précédente. Supprimer **Det**.
À la suite, faire "**x⁻¹**" (touches **SHIFT** **)**), saisir la matrice colonne **B** et appuyer sur **EXE**.

Avec le logiciel de calcul formel Xcas

► Ainsi, $\det(A) = -2 \neq 0$ donc A est inversible et le système admet une unique solution : le triplet $(-37,5 ; -48 ; -17,5)$.

5 Puissances d'une matrice

La puissance n -ième d'une matrice intervient souvent dans les calculs mais en donner une expression en fonction de n est souvent difficile. Cependant, nous allons voir que, dans des cas particuliers, c'est possible.

5.1 Puissances d'une matrice diagonale

Propriété 9: Puissance d'une matrice diagonale

Soit une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel. La puissance n -ième de D est la matrice $D^n = \text{diag}(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.

Preuve 5:

On démontre cette propriété par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

- $D^0 = I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \text{diag}(d_1^0, d_2^0, \dots, d_p^0)$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons que, pour un certain entier naturel n , $D^n = \text{diag}(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{n+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_p^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Exemple 16: Soit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

5.2 Puissances d'une matrice diagonalisable

Définition 15: Matrice diagonalisable

Une matrice carrée A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 17: $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. En effet, soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Propriété 10: Puissances d'une matrice diagonalisable

Si A est une matrice diagonalisable telle que $A = PDP^{-1}$ avec P une matrice inversible et D une matrice diagonale, alors, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

Preuve 6: On démontre cette propriété par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

- $A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Supposons que, pour un entier n donné, $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Exemple 18: Reprenons la matrice A de l'exemple précédent. Calculons A^4 .

$$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 2 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -90 \\ 15 & -29 \end{pmatrix}.$$

Méthode 5 (Déterminer M^n lorsque M est diagonalisable):

- ① M est diagonalisable donc $M = PDP^{-1}$. En général, une au moins des matrices P et D est donnée (la **diagonalisation**, procédé pour les trouver, est hors programme en Terminale).
- ② On démontre par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$.

EXERCICE

On considère la matrice T diagonalisable telle que :

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible, } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

et D une matrice diagonale.

Déterminer T^n avec une calculatrice, puis avec un logiciel de calcul formel.

CORRECTION**Avec la calculatrice :**

- On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $D = P^{-1}TP$. On obtient $D = \text{diag}(1 ; 0,3 ; -0,1)$.
- On calcule alors $T^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(1 ; 0,3^n ; (-0,1)^n)$. On obtient :

$$T^n = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} (-0,1)^n + 11 \times 0,3^n + 10 & (-0,1)^n - 11 \times 0,3^n + 10 & 2(1 - (-0,1)^n) \\ (-0,1)^n - 11 \times 0,3^n + 10 & (-0,1)^n + 11 \times 0,3^n + 10 & 2(1 - (-0,1)^n) \\ -10(-0,1)^n + 10 & -10(-0,1)^n + 10 & 2(1 + 10(-0,1)^n) \end{pmatrix}$$

Avec le logiciel de calcul formel Xcas :

- On crée la matrice T en mettant ses coefficients sous la forme de fraction :

$$T := \text{float2rational}([[0.6, 0.3, 0.1], [0.3, 0.6, 0.1], [0.5, 0.5, 0]])$$

- On élève T à la puissance n : $\text{matpow}(T, n)$.

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \frac{(-\frac{1}{10})^n + 11 * (\frac{3}{10})^n + 10}{22} & \frac{(-\frac{1}{10})^n - 11 * (\frac{3}{10})^n + 10}{22} & \frac{-(-\frac{1}{10})^n + 1}{11} \\ \frac{(-\frac{1}{10})^n - 11 * (\frac{3}{10})^n + 10}{22} & \frac{(-\frac{1}{10})^n + 11 * (\frac{3}{10})^n + 10}{22} & \frac{-(-\frac{1}{10})^n + 1}{11} \\ \frac{-10 * (-\frac{1}{10})^n + 10}{22} & \frac{-10 * (-\frac{1}{10})^n + 10}{22} & \frac{10 * (-\frac{1}{10})^n + 1}{11} \end{bmatrix}.$$